

边坡局部和整体稳定性评价方法的辩证统一

尹小涛¹, 薛海斌², 汤 华¹, 任兴文³, 宋 罡¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 西安理工大学 岩土工程研究所, 陕西 西安 710048;
3. 西安长庆科技工程有限责任公司, 陕西 西安 710021;)

摘 要: 边坡稳定性评价方法有局部和整体两类, 两者之间存在差异有其历史的局限性和存在的合理性。以极限平衡法和有限元强度折减法为例, 分析了典型整体与局部稳定性评价方法在滑面搜索、平衡条件、安全系数的定义、材料参数和失稳等 5 个方面存在的异同。利用 PFC 算例揭示了真实边坡带有强烈空间和时间特征的渐进破坏特性, 发现边坡失稳是自然地形的重塑、再造和稳定的过程, 也是一个动能转换和耗散的过程。针对边坡稳定问题及其特点, 提出了基于广义软化的边坡稳定矢量和法的理论构架和技术路线, 并进行了程序实现, 克服了传统强度折减脱离实际材料劣化特征的不足, 安全系数求解仅与应力状态相关, 假设条件少, 可以实现局部与整体稳定评价的辩证统一, 可以反映边坡失稳的渐进特性和参数演化的时空效应。与传统极限平衡法(LEM)和强度折减法(SRM)在滑面和安全系数方面的综合对比发现, 局部稳定揭示的滑面更稳定, 获取的安全系数是全周期的, 文中方法所得安全系数比整体方法的结果稍高, 差异是整体方法的假设条件造成的。

关 键 词: 边坡; 局部稳定性评价方法; 整体稳定性评价方法; 滑面; 安全系数; 广义软化; 矢量和法

中图分类号: TU 472

文献标识码: A

文章编号: 1000—7598 (2018) 增 1—0098—07

Dialectical unity of slope local and global stability analysis methods

YIN Xiao-tao¹, XUE Hai-bin², TANG Hua¹, REN Xing-wen³, SONG Gang¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China ; 2. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China;
3. Xi'an Changqing Technology Engineering Co., Ltd., Xi'an, Shaanxi 710021, China)

Abstract: Analysis method of slope stability can be classified into local and global kinds. These different points have their historical rationality and limit. Taking limit equilibrium method and strength reduction method for examples, the difference of typical local and global one such as slip surface, equilibrium condition, definition of safety factor, material parameters and un-stability is studied and summarized. Using a PFC slope fail case presents that real slope un-stability has observably spatiotemporal series and progressive features. Practical slope failure is a process of terrain reconstruction and stabilization and a process of potential and kinetic energy transition and dissipation. Aiming at these, the theoretical framework and technical route of slope stability vector sum method considering generalized softening are established. The relative program is implemented too. Whose reduction has material degradation back-ground. Its safety factor only relates to stress state of the slope. There are few assumed conditions in the method, which can realize dialectical unity of local and global stability and reflects progressive characteristics and spatiotemporal effect of slope un-stability. The safety factor and slip surface obtained by the method proposed compared with results of LEM and SRM, show that slip surface of local one is more stable, safety factor is whole life cycle and is larger than that of global one by 5%. The difference between local and global slope stability analysis method is caused by their assumed conditions.

Keywords: slope; local stability evaluation method; global stability evaluation method; slip surface; safety factor; generalized softening; vector sum method

1 前 言

边坡安全是一个古老的工程问题, 边坡稳定性

评价的核心是如何得到潜在最危险滑动面和精确评估安全系数。

历经多年的发展边坡稳定性评价方法有两大

收稿日期: 2018-04-03

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 51778609, No. 51608518, No. 41202226); 云南省交通科技项目 (云交科教[2017]23 号)。

This work was supported by the Natural Science Foundation of China(51778609, 51608518, 41202226) and Traffic Science and Technology Project of Yunnan Province([2017]No.23).

第一作者简介: 尹小涛, 男, 1975 年生, 博士, 副研究员, 主要从事岩土细观力学实验和数值模拟工作。E-mail: yxt9406@163.com

类典型方法，即极限平衡法和基于数值分析的强度折减法。两类方法都有一些假设及其适用范围，极限平衡法被工程界广泛接受，因该方法简单明了，且能便捷的得到工程界关心的最不利滑动面和最小安全系数。目前已发展了很多理论简介的 2D 和 3D 方法，也开发了很多操作简单的软件，缺点是配套的滑面搜索技术往往脱离边坡实际变形破坏机制独立存在^[1-8]，随着计算机技术的发展，计算规模越来越大，模型可以做到很精细，优点是变形破坏机制符合实际，也可以获取安全系数，强度折减法缺点是折减有可能脱离材料的实际劣化规律，也有很多软件可以使用^[9-19]。

在对比典型整体和局部稳定性评价方法的基础上，本文分析了局部与整理的辩证关系，探讨了符合工程实际和真实变形破坏机制的稳定性评价方法，探索强度与变形统一的边坡稳定性评价方法。

2 典型局部与整体稳定性评价方法

2.1 典型的局部与整体稳定性评价方法

2.1.1 整体稳定性评价方法

极限平衡法是一种典型的边坡整体稳定性评价方法，分析时假设沿整个滑面坡体有限条块的材料同时达到极限状态，在沿滑面静力平衡的基础上，通过抗滑力与下滑力之比，计算得到边坡的安全系数。常用的有 Fellenious 瑞典法、简化 Janbu 法、简化 Bishop 法、Lowe-Karafiath 法、美国陆军师团法、Morgentern-Price 法、Spencer 法、Sarma 法、斜条分法和无条分法^[1-8]，区别在条间力假设不同，采取力平衡、力矩平衡和兼顾力及力矩平衡等不同平衡方式，同时达到极限平衡状态的方式有超载和强度折减两种途径。配套的最危险滑动面的搜索方式一般有全局自动搜索方法、指定剪入剪出口范围的自动搜索方法、指定滑面方法等方法，应用最广的是基于试算和最优搜索的方法。

2.1.2 局部稳定性评价方法

有限元强度折减法是一种典型的局部稳定性评价方法，一般通过持续折减材料强度参数，直到计算至边坡满足不收敛或者塑性区贯通等边坡失稳判据止，通过塑性区、剪应变云图或者位移云图等综合确定滑移破坏面，计算终止前一步的折减系数即边坡的安全系数^[9-19]。

有限元强度折减安全系数的定义是基于强度储备的概念，即外荷载保持不变的条件下坡体发挥的最大抗剪强度与外荷载作用下坡体内产生的实际剪应力的比。无需事先假定滑面形状与位置，相对

于极限平衡法其滑面更符合实际。

2.2 局部与整体稳定性评价方法的异同点探讨

整体方法更注重沿整个滑动面的材料是否同时进入极限状态，计算中不涉及材料变形特征，往往有刚性假设，也可考虑条块间变形相容。局部方法涉及材料的渐进破坏，不预设滑动面，破坏是渐进的，两类典型方法的对比结果见表 1。

表 1 局部与整体稳定性评价方法的异同点
Table 1 Similarities and differences of typical local and global stability methods for slope

异同点		极限平衡法	强度折减法
滑面	滑面确定	试算最优确定	变形破坏机制
	极限状态	同时达到	渐进达到
平衡	平衡	静力平衡	应力应变平衡
	假设	刚体	变形协调
稳定性材料	安全系数	超载或强度储备	强度储备
	参数	仅涉及强度参数	强度与变形参数均涉及
失稳	时间	整体同时达到极限状态	局部渐进达到极限状态
	时空	不考虑局部渐进	考虑局部渐进
判据		安全系数为 1.0	多判据，不收敛、塑性区贯通、安全系数为 1.0

经多年工程应用检验，极限平衡法在土质边坡中使用状况良好，在岩质边坡尤其是带有陡倾结构面边坡的稳定性评价中存在很大问题，而有限元强度折减法的适用性较强，但其存在折减是否脱离实际材料劣化规律的问题。

2.3 实际边坡的破坏过程

PFC 颗粒流软件能很好地模拟和揭示边坡的破坏过程，探讨当前边坡稳定性评价方法异同点的物理学本质，笔者等利用 PFC^{2D} 软件建立了一个宽 30 m、高 20 m 的边坡模型，颗粒半径为 0.1 m，采用黏结模型，输入参数有重度 18.5 kN/m³，接触刚度为 15.5 MPa，黏结模型颗粒间黏聚力 c_{bond} 36.0 kPa，黏结模型颗粒间摩擦系数 fric 0.36。初始模型平衡后坡体保持稳定，仅对黏聚力折减，折减到初始值的 1/2 时坡体发生渐进破坏，计算至平衡共 200 000 步，每 20 000 步记录一次坡体形态，结果如图 1 所示。从图中可以看出，边坡失稳是一个渐进破坏过程，是坡体物质重新稳定并堆积的地形重塑过程，伴随强烈的动能转换，具有强烈的时间序列特征，不是简单的持续折减直到整体破坏的过程，最终滑动面是初始滑动面，在势-动能转变过程中持续改造的结果，是能量演化、吸收、消散直到再次稳定的最终体现。

现有分析方法不能再现这一动力学过程，不能

很好地反映局部与整体的时空演化关系。

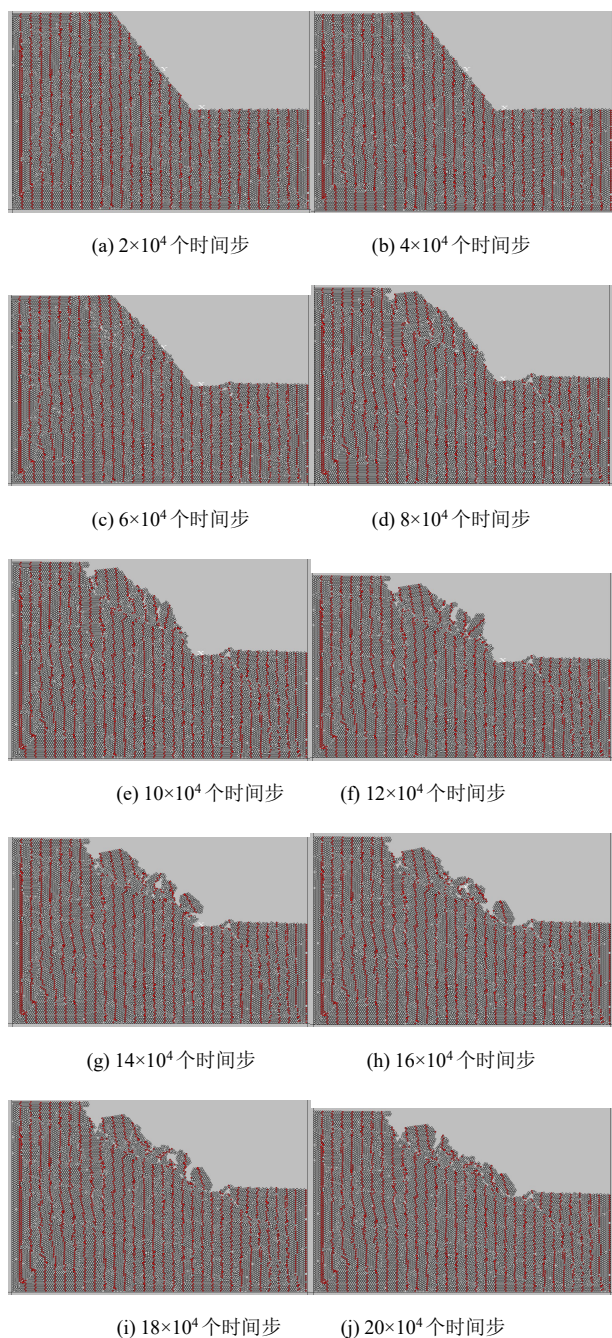


图1 边坡渐进破坏过程

Fig.1 Progressive damage of slope

3 基于广义软化的边坡稳定矢量和法

探讨了局部和整体方法的优缺点后发现, 工程中多数边坡的破坏是由于材料工程特性的劣化造成的, 实际边坡的破坏呈现典型的动力特征, 因此边坡稳定性的计算和评价利用动力方程方能契合其阶段特征, 本构关系必须能够反映材料的劣化机制, 这是本文研究的目标和切入点, 立足材料的软化特性, 探讨破坏的时空演化机制。

3.1 理论框架

3.1.1 广义软化

软硬本身是个物理性质, 岩土力学中的软化更多是描述材料宏观应力-应变关系的峰后跌落特征, 岩土材料的软化反映的是材料强度特性的劣化。

客观上造成岩土材料软化的因素很多, 常见的有水、爆破振动、工程扰动等单因素或者多因素作用。广义的意思是不管过程和因素的叠加, 只关心初始值、变化过程和残余值。软化本构的建立是一个难题, 摩尔-库仑线性软化本构是一类简单实用的软化模型, 其中代表性的有 FLAC 软件自带的应变软化本构, 如图 2 所示。图中, c 为黏聚力; φ 为内摩擦角; 下标 p 表示峰值 peak; 下标 r 表示残余 residual。上述软化曲线, 通过设计材料试验获取, 也可以通过反分析确定。例如, 设计不同含水率试验测定强度参数, 获取试验过程中不可恢复变形与强度参数劣化关系。实际使用过程中更多的是可以获取峰值强度和残余强度, 假设几种劣化斜率, 通过与破坏现象或监测曲线对比拟合确定。

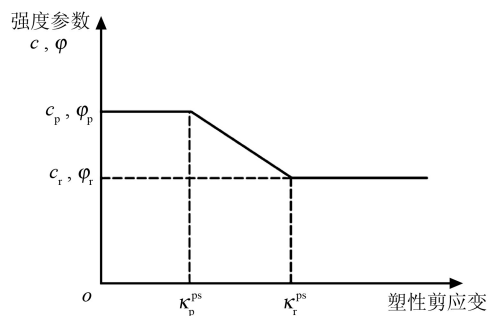


图2 塑性剪应变与强度参数广义软化曲线

Fig.2 Generalized softening curve of strength parameters and plastic shear strain

3.1.2 矢量和法

通过广义软化克服了传统强度折减法的折减脱离材料自身劣化规律的不足, 软化是现实范围限定的。劣化规律通过 c 和 φ 的分段曲线表达, 避免了两者的独立性或者相关性研究存在的难题。基于此的坡体应力状态的变化更符合实际。

矢量和法相对于传统的极限平衡法和强度折减法假设条件少, 仅关心边坡的真实应力状态, 其安全系数的求解中考虑了力的矢量特征, 也符合真实边坡失稳是有方向矢量特征这一点。以二维矢量和法安全系数求解进行示意说明, 如图 3 所示。图中, Ω 为滑体; d 为主滑方向; θ 为主滑方向与水平面夹角; S 为滑面; σ_s 为滑面某点 A 的下滑力矢, σ_n , σ_t 分别为法向和切向分力, 见刘艳章等^[20]和

郭明伟等^[21]文中标记。

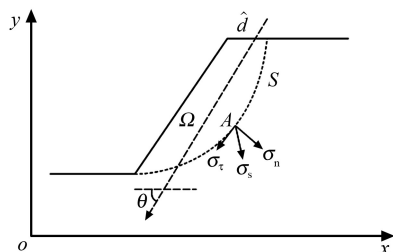


图3 二维矢量和法求解安全系数示意图
Fig.3 Sketch of safety factor calculated by two-dimensional vector sum method

滑动面通过分析系列监测线上剪应变增量最大点集、采用最小二乘法进行拟合光滑处理的方式获取。安全系数的计算是滑面上抗滑力矢与下滑力矢沿整体下滑方向投影比求解。

3.1.3 技术路线及程序实现

在 FLAC 软件平台进行考虑软化的动力求解的二次开发，通过剪应变追踪搜索得到滑动面，在该面上输出应力和应变，利用 Matlab 编程获取滑面上任意点的应力插值、单元号和参数识别，下滑力和矢与抗滑力和矢，沿整体下滑方向下滑力和矢与抗滑力和矢的投影，计算安全系数。基于广义软化的边坡稳定矢量和法的技术路线及程序实现见图 4。

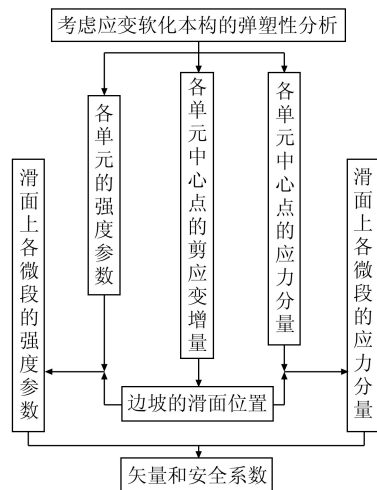


图4 基于广义软化的边坡稳定矢量和法技术路线
Fig.4 Technology roadmap of vector sum method considered generalized softening slope stability

技术路线：

- ① 在 FLAC 平台进行计算，采用应变软化本构，弹塑性分析。
- ② 记录计算稳定时刻，单元的强度参数、中心点正应力与剪应力及剪应变增量。如无法获取有

效地弹塑性计算结果，则需采用弹性本构弥补应力应变信息。

③ 设置一系列垂直监测线，检出并记录剪应变增量最大值点及其坐标位置，连接获取初始滑面，最小二乘法拟合确定最终滑面。

④ Matlab 编程实现滑面穿越单元点应力插值与单元编号记录，在步②的基础上检出对应强度参数，确定滑面各点的应力状态。

⑤ 沿滑面将各点的应力，转化为滑面对应的法向应力和切向应力，获取下滑合力矢与抗滑合力矢，按设定的主滑方向，投影合力矢，计算安全系数。本文仅是在软化边坡的有限范围内探讨两类方法的差异和辩证统一的力学本质，不做最小安全系数的探讨。

3.2 算例验证

3.2.1 计算模型、边界条件及参数

边坡几何尺寸见图 5。四边形单元划分，共计 22 062 个单元，44 738 个节点。边界条件为两侧为法向约束和底部采用全约束。

采用考虑应变软化的摩尔-库仑模型，计算所用参数见表 2。

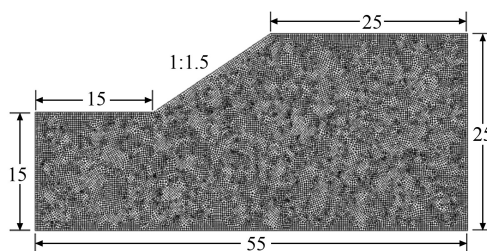


图5 边坡数值及几何模型（单位：m）
Fig.5 Numerical and geometry model of slope(unit: m)

表2 输入参数
Table 2 Input parameters

材料 参数	重度 (kN/m ³)	弹性 模量 /MPa	泊 松 比	峰值强度			残余强度			剪 胀 角 (°)
				黏聚 力 /MPa	内摩 擦角 /(°)	软化 参数 阈值	黏聚 力 /kPa	内摩 擦角 /(°)	软化 参数 阈值	
黏土	18.8	7.0	0.38	7	20	0	2	13	0.1	0

不同塑性剪应变对应的强度参数，见式 (1)、(2)。阈值对计算结果的影响机制和确定方法见文献[22]，本文只是利用该领域的研究成果。

$$c(\kappa^{ps}) = \begin{cases} 7000 - \frac{7000 - 2000}{0.1} \kappa^{ps}, & (0 \leq \kappa^{ps} < 0.1) \\ 2000, & (\kappa^{ps} \geq 0.1) \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi(\kappa^{\text{ps}}) = \begin{cases} 20 - \frac{20-13}{0.1} \kappa^{\text{ps}}, & (0 \leq \kappa^{\text{ps}} < 0.1) \\ 13, & (\kappa^{\text{ps}} \geq 0.1) \end{cases} \quad (2)$$

本文通过初始剖分网格足够精细的方式保障求解精度或者解决网格依赖问题。

3.2.2 边坡的渐进破坏及滑面的确定

从图 6 中可以看出, 边坡首先在坡脚部位出现破坏; 接着剪应变增量逐步增加, 云图显示向坡顶方向扩展, 并逐渐贯通, 最终整体失稳。破坏的产生在初期是局部材料破坏, 最终贯通且边坡整体失稳, 破坏表现出典型的牵引渐进破坏特征。

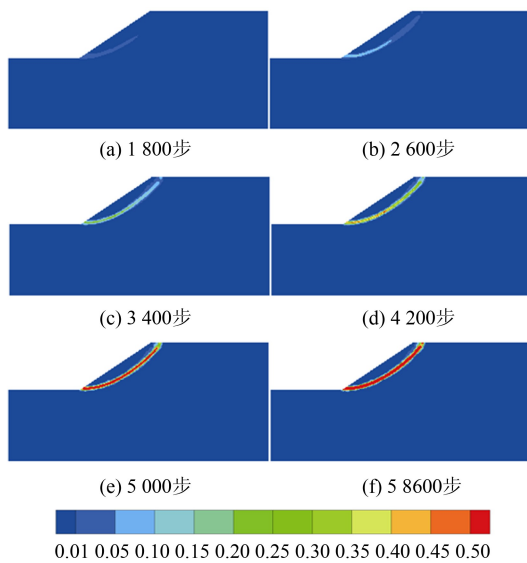


图 6 剪应变增量云图揭示的边坡渐进破坏特征
Fig.6 Progressive destruction process of slope presented by nephogram of shear strain increment

基于剪应变增量追踪得到的滑面为图 7 中应变软化标注滑面, 滑面位于峰值强度和残余强度下极限平衡法自动搜索所得的上滑面和下滑面之间。上下滑面代表了两个极端情况, 实际边坡的滑面应该在此区间内部, 这佐证了利用该方法搜索滑面的合理性。基于塑性应变揭示的滑面为一个带, 即进入塑性的一系列单元组成, 本文滑面的确定通过记录

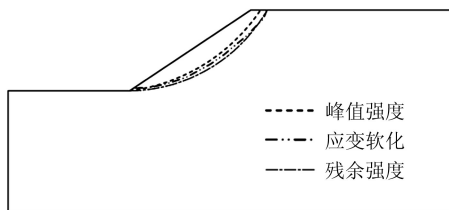


图 7 基于剪应变增量的软化边坡滑面的追踪结果及验证
Fig.7 Slip surface of softening slope obtained base on shear strain increment tracking results and its verification

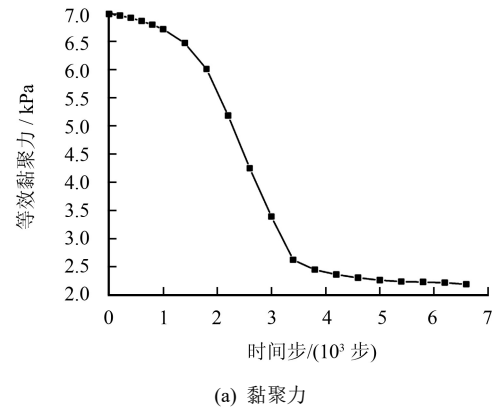
剪应变增量最大点的最小二乘拟合确定, 变带为面是为了方便计算安全系数。

3.2.3 材料强度参数沿滑面的时空演化规律

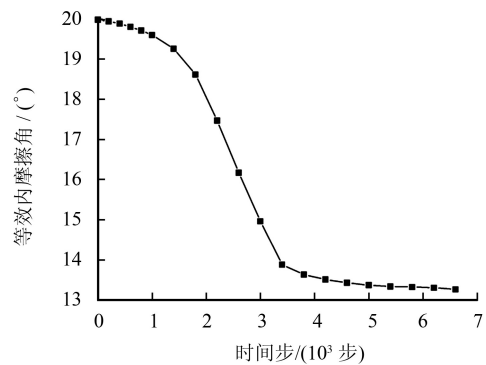
滑面穿越了不同的单元, 材料属性不同, 应力状态不同, 使得沿滑面的材料强度参数呈现空间时间分布的不均匀性, 带有一定的尺度特征, 对其按照弧长沿整个滑面进行加权平均统计, 等效强度参数按式 (3) 求取。

$$\bar{c} = \frac{\int_s c_i ds}{\int_s ds}; \quad \bar{\varphi} = \arctan \left(\frac{\int_s \tan \varphi_i ds}{\int_s ds} \right) \quad (3)$$

经过等效处理后的沿滑面不同时间步下的材料强度参数, 类似于不考虑地层结构的边坡综合强度参数, 不同时间步下等效强度参数如图 8 所示。



(a) 黏聚力



(b) 内摩擦角

图 8 沿整个滑面等效强度参数演化曲线
Fig.8 Evolutional curves of equivalent strength parameters for global slip surface

从图 8 中可以看出, 整个滑面加权平均强度参数, 在初期接近峰值强度, 随着局部破坏到贯通破坏, 或者局部失稳到整体失稳, 最终强度参数接近残余强度, 这一规律与图 6 揭示的渐进破坏过程相呼应。

3.2.4 安全性演化规律

基于这些不同阶段的等效强度参数, 对比极限

平衡法整体稳定安全系数与基于广义软化的矢量和法局部稳定安全系数, 结果如图 9 所示。极限平衡法的安全系数是通过 Geo-slope 软件带入不同阶段强度参数求取。

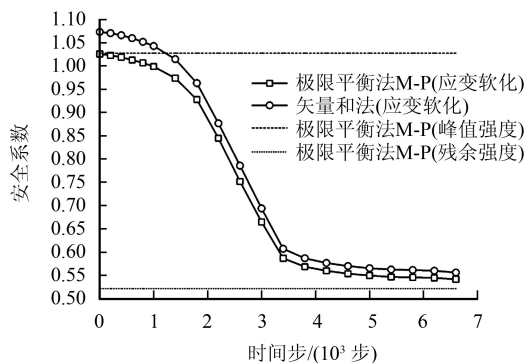


图 9 整体与局部稳定评价方法计算所得安全系数曲线

Fig.9 Evolutional curves of safety factor obtained by global and local stability analysis methods for slope

从图 9 中可以看出, 极限平衡法计算所得安全系数在峰和残余强度计算所得安全系数之间; 考虑软化的矢量和法与极限平衡法所得安全系数演化曲线与等效强度软化规律类似, 且矢量和法计算结果整体比极限平衡法的结果约大 2.61%~4.46%。原因是假设条件的不同, 即极限平衡法, 假设刚体条块, 变形不相容, 且同步进入极限状态, 而有限元则变形协调, 且是局部到整体的渐进破坏, 所以前者有所夸大, 结果稍低, 后者计算得到的安全系数稍高。

3.2.5 局部与整体稳定评价方法的辩证统一

从滑面形态看, 基于广义软化的边坡稳定性矢量和法, 利用剪应变增量追踪得到的滑面比较稳定; 而极限平衡法利用不同阶段等效强度参数自动搜索得到的滑面则在上滑面 (峰值强度) 和下滑面 (残余强度) 之间变化。这说明对于破坏的描述, 边坡局部稳定性评价方法更稳定, 且更符合实际边坡的破坏特点。

从安全系数来看, 矢量和法的安全系数仅与边坡真实应力状态和下滑方向相关, 假设少, 结果比整体稳定评价方法稍大, 高的原因在于两类方法的假设条件不同。基于广义软化的边坡稳定性矢量和法的局部稳定性评价方法可以获取不同软化条件下的安全系数和设计参数, 评价更全面, 信息更实用。

在峰值和残余两个极端条件下局部与整体稳定评价方法的区别不大。在基于广义软化的边坡稳定性矢量和法下可以实现局部与整体稳定性评价方法的统一描述。

4 结 论

(1) 极限平衡法和强度折减法分别代表了典型的边坡整体稳定和局部稳定评价方法。两类方法在滑面、平衡条件、安全系数的定义、材料参数和失稳等五方面存在差异。

(2) 局部稳定性评价方法揭示的滑面更稳定, 且获取的安全系数是全周期的, 相对与整体稳定性评价方法的计算结果偏高 (文中条件下不大于 5%), 差异是假设条件的不同造成的。

(3) 基于广义软化边坡稳定性矢量和法, 可以实现局部与整体稳定性评价方法的辩证统一。方法克服了传统强度折减脱离岩土材料实际劣化特征的不足, 同时仅与应力状态相关, 假设条件少。

边坡失稳是一个由点到面带有强烈空间和时间特征的破坏问题, 是自然地形的重塑、再造和稳定的过程。因此, 滑面的追踪和安全系数的求解, 不能局限于静力平衡, 需要在动力状态对其进行求解, 后期需要继续完善基于动力学方法的滑动面追踪技术和安全系数求解方法研究。需要说明的是边坡领域的研究很难做到大一统方法的解决所有的边坡稳定性评价难题, 反而应该有限分类研究, 在积累中逐步实现指导实践和安全控制的目标。

参 考 文 献

- [1] BISHOP A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes[J]. *Geotechnique*, 1955, 5: 7-17
- [2] MORGENTERN N R, PRICE V E. The analysis of the stability of general slip surfaces[J]. *Geotechnique*, 1965, 15(1): 79-93.
- [3] SPENCER E A. Method of analysis the stability of embankments assuming parallel interslice forces[J]. *Geotechnique*, 1967, 17(1): 11-26.
- [4] FAN K, FREDLUND D G, WILSON G W. An interslice functions for limit equilibrium slope stability analysis[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1986, 23(3): 287-296.
- [5] DUNCAN J M. State of the art: Limit equilibrium and finite element analysis of slope[J]. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 1996, 122(7): 577-596.
- [6] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析: 原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. 533-560.
CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis: Theory, methods and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003, 533-560.
- [7] 胡军, 钟龙, 杨昕光. 基于水平条分任意滑动面的边坡

- 稳定性分析上限法[J]. 土木工程学报, 2013, 46(6): 117—121.
- HU Jun, ZHONG Long, YANG Xin-guang. Upper bound approach for slope stability analysis based on arbitrary sliding surface and horizontal slices[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2013, 46(6): 117—121.
- [8] 沈振中, 崔娟, 任华. 土石坝抗震稳定性分析, 2011, 9(3): 145—149, 166.
- SHEN Zhen-hong, CUI Juan, REN Hua. Quasi-static limit equilibrium horizontal slice method for seismic stability analysis of earth-rock dam[J]. **South-to-North Water Transfers and Water Science & Technology**, 2011, 9(3): 145—149, 166.
- [9] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. **Geotechnique**, 1999, 49(3): 387—403.
- [10] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. **Geotechnique**, 1999, 49(6): 835—840.
- [11] 郑颖人, 赵尚毅. 用有限元法求边坡稳定安全系数[J]. 公路交通技术, 2002, 18(1): 7—9.
- ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi. Analysis of slope stability by finite elements[J]. **Technology of Highway and Transport**, 2002, 18(1): 7—9.
- [12] 赵尚毅, 郑颖人, 邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2): 254—260.
- ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, DENG Wei-dong. Stability analysis of jointed rock slope by strength reduction FEM[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(2): 254—260.
- [13] 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19): 3381—3388.
- ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi. Application of strength reduction FEM in soil and rock slope[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(19): 3381—3388.
- [14] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626—628.
- ZHENG Hong, LI Chun-guang, LEE C F, et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(5): 626—628.
- [15] 施建勇, 曹秋荣, 周璐璐. 修正有限元强度折减法与失稳判据在边坡稳定分析中的应用[J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 237—241.
- SHI Jian-yong, CAO Qiu-rong, ZHOU Lu-fei. Modified finite element method for shear strength reduction and instability criterion in slope stability analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(2): 237—241.
- [16] 陈力华, 靳晓光. 有限元强度折减法中边坡3种失效判据的适用性研究[J]. 土木工程学报, 2012, 45(9): 136—146.
- CHEN Li-hua, JI Xiao-guang. Study on the applicability of three criteria for slope instability using finite element strength reduction method[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2012, 45(9): 136—146.
- [17] 陈国庆, 黄润秋, 石豫川, 等. 基于动态和整体强度折减法的边坡稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(2): 243—252.
- CHEN Guo-qing, HUANG Run-qiu, SHI Yu-chuan, et al. Stability analysis of slope based on dynamic and whole strength reduction methods[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2014, 33(2): 243—252.
- [18] 袁维, 郝笑甜, 李小春, 等. 一种考虑变形参数和强度参数协调折减的强度折减法研究[J]. 岩土力学, 2016, 37(7): 2096—2100.
- YUAN Wei, HAO Xiao-tian, LI Xiao-chun, et al. A strength reduction method considering reduction of strength parameters coordinating with deformation parameters[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(7): 2096—2100.
- [19] 李剑, 陈善雄, 余飞. 基于最大剪应变增量的边坡潜在滑动面搜索[J]. 岩土力学, 2013, 34(增刊 1): 371—378.
- LI Jian, CHEN Shan-xiong, YU Fei. A method for searching potential failure surface of slope based on maximum shear strain increment[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(Supp.1): 371—378.
- [20] 刘艳章, 葛修润, 李春光, 等. 基于矢量法安全系数的边坡与坝基稳定分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(10): 2130—2140.
- LIU Yan-zhang, GE Xiu-run, LI Chuan-guang, et al. Stability analysis of slope and dam foundation based on vector method safety factor[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(10): 2130—2140.
- [21] 郭明伟, 葛修润, 李春光, 等. 基于矢量和法的边坡稳定性分析中整体下滑趋势方向的探讨[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 31(4): 577—583.
- GUO Ming-wei, GE Xiu-run, LI Chuan-guang, et al. Study on potential sliding direction in slope stability analysis based on vector sum method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 31(4): 577—583.
- [22] CONTE E, SILVESTRI F, TRONCONE A. Stability analysis of slopes in soils with strain-softening behaviour[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37: 710—722.